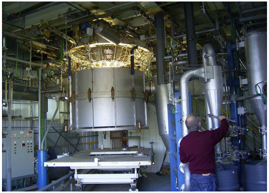
Théorie du contrôle : un tour d'horizon.
Du théorème de Kalman à la contrôlabilité de la chaleur.

D. Allonsius

Institut de Mathématiques de Marseille.

Mardi 17 Mai 2016



PROBLÈME DE CONTRÔLE

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + Ay(t) = Bu(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Système d'équations différentielles de dimension n avec m contrôles.
$A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ et $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$.
La solution est notée : $t \to \mathcal{L}_t(u|y_0)$.

EXEMPLE

PROBLÈME DE CONTRÔLE

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + Ay(t) = Bu(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Système d'équations différentielles de dimension n avec m contrôles.
$A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ et $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.
La solution est notée : $t \to \mathcal{L}_t(u|y_0)$.

EXEMPLE

$$\begin{cases} S'(t) = \alpha S(t) - \beta Z(t) \\ Z'(t) = -\gamma Z(t) + \delta S(t) + u(t) \end{cases}$$

ici : $y(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

COMMENT SURVIVRE ?

Soient $T > 0$ et $y_T \in \mathbb{R}^n$, par exemple : $y_T = \begin{pmatrix} S(0) \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\boxed{\text{Trouver } u \text{ tel que } \mathcal{L}_T(u|y_0) = y_T.}$$

PROBLÈME DE CONTRÔLE

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + Ay(t) = Bu(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

La solution est notée : $t \to \mathcal{L}_t(u|y_0)$.

Théorème de Kalman

Le système (1) est contrôlable (depuis n'importe quel état initial y_0 à n'importe quel état final y_T, en n'importe quel temps T) si et seulement si la matrice de Kalman de taille $n \times nm$ suivante :

$$[A : B] := (B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B)$$

est de rang (maximal) n.

PREUVE Soit $L_T : u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{L}_T(u|0)$.

(1) contrôlable $\Leftrightarrow$ L_T surjective $\Leftrightarrow$ L_T^* injective. $\boxed{L_T^* x = {}^t B y_x}$,

$$\begin{cases} \dot{y_x} = {}^t A y_x, \text{ sur } [0, T] \\ y_x(T) = x, \end{cases}$$

(1) n'est pas contrôlable $\Leftrightarrow$ Ker ${}^t[A : B] \neq \{0\}$ $\Leftrightarrow$ rang$([A : B]) < n$.

BILAN D'ÉNERGIE A L'ORDRE 1

$$E(t+dt)-E(t) = C\rho S dx(T(t+dt,x)-T(t,x))$$
$$E(t+dt)-E(t) = dt(j(t,x)-j(t,x+dx))+u(t,x)dxdt$$
$$j(t,x) = -\gamma(t,x)\partial_x T(t,x) \text{ (Loi de Fourier)}$$

Finalement :

$$\boxed{S\rho C\partial_t T(t,x) = -\partial_x\left(\gamma(t,x)\partial_x T(t,x)\right)+u(t,x)}$$

EQUATION DE LA CHALEUR, DIFFUSION CONSTANTE

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R}_+^*, \\ y(0,x) = y_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

EQUATION DE LA CHALEUR, DIFFUSION CONSTANTE

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R}_+^*, \\ y(0,x) = y_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

SOLUTION

Passer en Fourier : $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$.

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{y}(t,\xi) = 0 \\ \hat{y}(0,\xi) = \hat{y_0}(\xi) \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{y}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t}\hat{y_0}(\xi)$.

Soit $g(t) = x \to \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(2t)^{\frac{N}{2}}}$, g vérifie : $\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$.

$\Rightarrow \hat{y}(t,\xi) = \widehat{g(t)}(\xi)\hat{y_0}(\xi) = g\widehat{(t) * y}_0(\xi)$.

$\Rightarrow y(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{-(x-s)^2}{4t}} y_0(s)ds$.

EQUATION DE LA CHALEUR, DIFFUSION CONSTANTE

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R}_+^*, \\ y(0,x) = y_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

SOLUTION

Passer en Fourier : $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{y}(t,\xi) = 0 \\ \hat{y}(0,\xi) = \hat{y_0}(\xi) \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{y}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t}\hat{y_0}(\xi).$

Soit $g(t) = x \rightarrow \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(2t)^{\frac{N}{2}}}$, g vérifie : $\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-|\xi|^2 t}.$

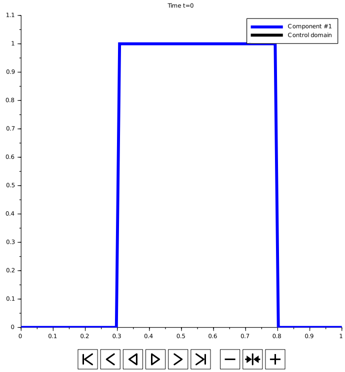
$\Rightarrow \hat{y}(t,\xi) = \widehat{g(t)}(\xi)\hat{y_0}(\xi) = \widehat{g(t) * y_0}(\xi).$

$\Rightarrow y(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{-(x-s)^2}{4t}} y_0(s)ds.$

$$\boxed{\forall t > 0,\ (x \rightarrow y(t,x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

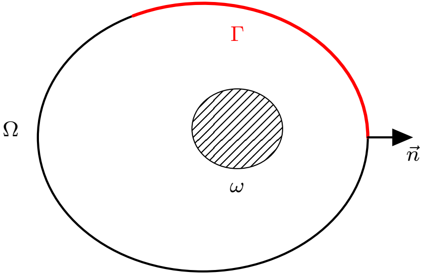
EQUATION DE LA CHALEUR, DIFFUSION CONSTANTE

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R}_+^*, \\ y(0,x) = y_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$



EQUATION DE LA CHALEUR AVEC CONTRÔLES

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = \mathbf{1}_\omega(t,x) u(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Omega \\ y(0,x) = y_0(x) \\ y = 0, \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega\backslash\Gamma \\ y(t,x) = v(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Gamma \end{cases}$$



Existence des solutions

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = \mathbf{1}_\omega(t,x)u(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Omega \\ y(0,x) = y_0(x) \\ y = 0, \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega\backslash\Gamma \\ y(t,x) = v(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Existence des solutions

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = \mathbf{1}_\omega(t,x)u(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Omega \\ y(0,x) = y_0(x) \\ y = 0, \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega\backslash\Gamma \\ y(t,x) = v(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Théorème

Il existe une unique solution y au problème (2) (au sens donné ci-après), qui vérifie de plus l'estimation :

$$\forall\tau\in(0,T),\ \|y(\tau)\|_{\mathcal{H}} \leq C(\|y_0\|_{\mathcal{H}} + \|u\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})}).$$

Existence des solutions

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = \mathbf{1}_\omega(t,x)u(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Omega \\ y(0,x) = y_0(x) \\ y = 0, \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega\backslash\Gamma \\ y(t,x) = v(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Définition : solution par transposition

Une solution de (2) est une fonction $y \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathcal{H})$ telle que
$\forall \tau \in [0,T]$, $\forall z \in \mathcal{H}'$,

$$\langle y(\tau), z\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}'} - \langle y_0, \varphi_z(0)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}'} = \begin{cases} \int_0^\tau (u(t,x), \mathbf{1}_\omega(t,x)\varphi_z(t))_{\mathcal{U}}\, dt \\ \int_0^\tau -(v(t,x), \frac{\partial}{\partial n}\varphi_z(t))_{\mathcal{U}}\, dt \end{cases}$$

où φ_z satisfait l'équation dite retrograde suivante :

$$\begin{cases} -\partial\varphi_z - \Delta\varphi_z = 0, \text{ sur } (0,T)\times\Omega \\ \varphi_z = 0, \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega \\ \varphi_z(\tau) = z \end{cases}$$

Existence des solutions

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) = \mathbf{1}_\omega(t,x)u(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Omega \\ y(0,x) = y_0(x) \\ y = 0, \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega\backslash\Gamma \\ y(t,x) = v(t,x), \text{ sur } (0,T)\times\Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Définition : solution par transposition

Une solution de (2) est une fonction $y \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathcal{H})$ telle que $\forall \tau \in [0,T]$, $\forall z \in \mathcal{H}'$,

$$\langle y(\tau), z\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}'} - \langle y_0, \varphi_z(0)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}'} = \begin{cases} \int_0^\tau (u(t,x), \mathbf{1}_\omega(t,x)\varphi_z(t))_{\mathcal{U}}\,dt \\ \int_0^\tau -(v(t,x), \frac{\partial}{\partial n}\varphi_z(t))_{\mathcal{U}}\,dt \end{cases}$$

où φ_z satisfait l'équation dite retrograde suivante :

$$\begin{cases} -\partial\varphi_z - \Delta\varphi_z = 0, \text{ sur } (0,T)\times\Omega \\ \varphi_z = 0, \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega \\ \varphi_z(\tau) = z \end{cases}$$

CONTRÔLE EXACT

Définition : Contrôle exacte

Soit $T > 0$. Le système contrôlé est dit exactement contrôlable au temps T si pour toute condition initiale $y_0 \in \mathcal{H}$ et pour toute fonction finale $y_1 \in \mathcal{H}$ il existe $u, v \in L^2(0, T; \mathcal{U})$ telle que la solution y de (2) vérifie $y(T) = y_1$.

$\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ ou $H^{-1}(\Omega)$...

CONTRÔLE EXACT

Définition : ~~Contrôlabilité exacte~~

Soit $T > 0$. Le système contrôlé est dit exactement contrôlable au temps T si pour toute condition initiale $y_0 \in \mathcal{H}$ et pour toute fonction finale $y_1 \in \mathcal{H}$ il existe $u, v \in L^2(0, T; \mathcal{U})$ telle que la solution y de (2) vérifie $y(T) = y_1$.

$\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ ou $H^{-1}(\Omega)$...

CONTRÔLE EXACT

Définition : ~~Contrôlabilité exacte~~

Soit $T > 0$. Le système contrôlé est dit exactement contrôlable au temps T si pour toute condition initiale $y_0 \in \mathcal{H}$ et pour toute fonction finale $y_1 \in \mathcal{H}$ il existe $u, v \in L^2(0, T; \mathcal{U})$ telle que la solution y de (2) vérifie $y(T) = y_1$.

$\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ ou $H^{-1}(\Omega)$...

CONTRÔLE APPROCHÉ

Définition : contrôle approché

Soit $T > 0$, le système contrôlé (2) est dit approximativement contrôlable au temps T si pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute condition initiale $y_0 \in \mathcal{H}$ et toute fonction finale $y_1 \in \mathcal{H}$ il existe $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$ telle que la solution correspondante $\mathcal{L}_T(u|y_0)$ vérifie $\|\mathcal{L}_T(u|y_0) - y_1\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon$.

CONTRÔLE AUX TRAJECTOIRES ET CONTRÔLE À ZÉRO

Définition : contrôle aux trajectoires

Soit $T > 0$, le système contrôlé (2) est dit contrôlable aux trajectoires au temps T si pour toutes conditions initiales $y_0, \tilde{y_0} \in \mathcal{H}$, pour tout $u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ il existe $\tilde{u} \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ tel que les solution $t \to \mathcal{L}_t(u|y_0)$ et respectivement $t \to \mathcal{L}_t(\tilde{u}|\tilde{y_0})$ du problème (2) avec la donnée initiale y_0 et le contrôle u, respectivement la donnée initiale $\tilde{y_0}$ et le contrôle $\tilde{u}$, vérifient $\mathcal{L}_T(u|y_0) = \mathcal{L}_T(\tilde{u}|\tilde{y_0})$.

$$\Updownarrow$$

Définition : contrôle à zéro

Soit $T > 0$, le système contrôlé (2) est dit contrôlable à zéro au temps T si pour toute condition initiale $y_0 \in \mathcal{H}$ il existe $u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ telle que la solution vérifie $\mathcal{L}_T(u|y_0) = 0$.

CONTRÔLE AUX TRAJECTOIRES ET CONTRÔLE À ZÉRO

Définition : contrôle aux trajectoires

Soit $T > 0$, le système contrôlé (2) est dit contrôlable aux trajectoires au temps T si pour toutes conditions initiales $y_0, \tilde{y_0} \in \mathcal{H}$, pour tout $u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ il existe $\tilde{u} \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ tel que les solution $t \to \mathcal{L}_t(u|y_0)$ et respectivement $t \to \mathcal{L}_t(\tilde{u}|\tilde{y_0})$ du problème (2) avec la donnée initiale y_0 et le contrôle u, respectivement la donnée initiale $\tilde{y_0}$ et le contrôle $\tilde{u}$, vérifient $\mathcal{L}_T(u|y_0) = \mathcal{L}_T(\tilde{u}|\tilde{y_0})$.

$$\Updownarrow$$

Définition : contrôle à zéro

Soit $T > 0$, le système contrôlé (2) est dit contrôlable à zéro au temps T si pour toute condition initiale $y_0 \in \mathcal{H}$ il existe $u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ telle que la solution vérifie $\mathcal{L}_T(u|y_0) = 0$.

La preuve par le dessin :

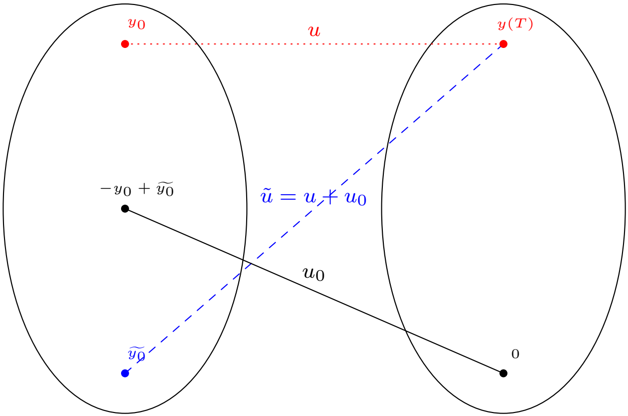


Figure : Contrôlabilité à zéro $\Rightarrow$ Contrôlabilité aux trajectoires.

La preuve par le dessin :

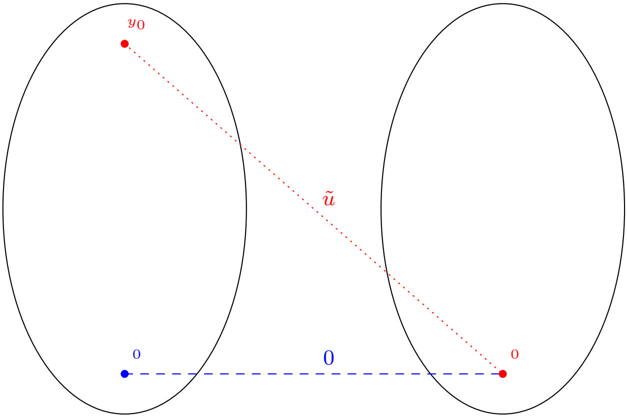


Figure : Contrôlabilité aux trajectoires $\Rightarrow$ Contrôlabilité à zéro.

La preuve par le dessin :

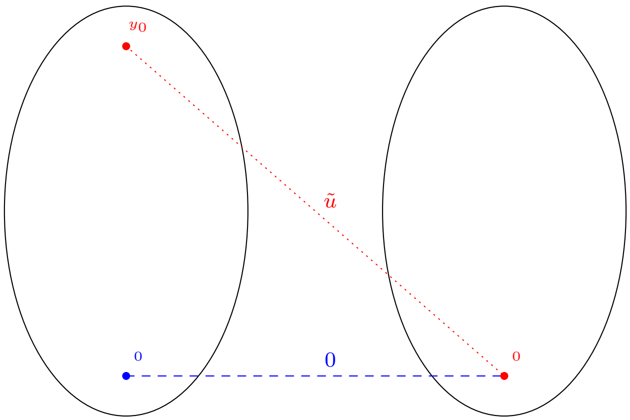


FIGURE : Contrôlabilité aux trajectoires ⇒ Contrôlabilité à zéro.

Dans toute la suite, on s'intéresse uniquement à la contrôlabilité à 0 de l'équation de la chaleur.

COMMENT S'Y PRENDRE ?

Rappel : $L_T : L^2(0,T;\mathcal{U}) \to \mathcal{H}$, $L_T(u) = \mathcal{L}_T(u|0)$.

Le système (2) est :

- Exactement contrôlable $\Leftrightarrow \forall y_0, y_1 \in \mathcal{H}$, $\exists u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$, $\mathcal{L}_T(u|y_0) = y_1$
  $\Leftrightarrow \forall y_0, y_1 \in \mathcal{H}$, $\exists u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$, $L_T(u) = y_1 - \mathcal{L}_T(0|y_0)$.
  $\Leftrightarrow \boxed{L_T^* \text{ est injective.}}$

- Approximativement contrôlable $\Leftrightarrow \boxed{\overline{\mathrm{Im}(L_T)} = \mathcal{H}}$.

COMMENT S'Y PRENDRE ?

Rappel : $L_T : L^2(0,T;\mathcal{U}) \to \mathcal{H}$, $L_T(u) = \mathcal{L}_T(u|0)$.

Le système (2) est :

- Contrôlable à zéro $\Leftrightarrow \forall y_0, y_1 \in \mathcal{H}$, $\exists u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$, $\mathcal{L}_T(u|y_0) = 0$
  $\Leftrightarrow \forall y_0, y_1 \in \mathcal{H}$, $\exists u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$, $L_T(u) = -\mathcal{L}_T(0|y_0)$.
  $\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Im}(\mathcal{L}_T(0|\bullet)) \subset \mathrm{Im}(L_T)}$

Rappel : $L_T : L^2(0,T;\mathcal{U}) \to \mathcal{H}$, $L_T(u) = \mathcal{L}_T(u|0)$.

Le système (2) est :

- Contrôlable à zéro $\Leftrightarrow \forall y_0, y_1 \in \mathcal{H}$, $\exists u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$, $\mathcal{L}_T(u|y_0) = 0$
  $\Leftrightarrow \forall y_0, y_1 \in \mathcal{H}$, $\exists u \in L^2(0,T;\mathcal{U})$, $L_T(u) = -\mathcal{L}_T(0|y_0)$.
  $\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Im}(\mathcal{L}_T(0|\bullet)) \subset \mathrm{Im}(L_T)}$

Lemme

Soient X, Y, Z trois espaces de Hilbert. Soient $F \in \mathcal{L}_c(X,Z)$ et $G \in \mathcal{L}_c(Y,Z)$. On a :

$$\mathrm{Im}\ F \subset \mathrm{Im}\ G \Leftrightarrow \exists c > 0, \forall z \in Z', \|F^* z\|_{X'} \leq c\|G^* z\|_{Y'}.$$

COMMENT S'Y PRENDRE ?

Rappel : $L_T : L^2(0,T;\mathcal{U}) \to \mathcal{H}$, $L_T(u) = \mathcal{L}_T(u|0)$.

Le système (2) est :

- Contrôlable à zéro $\Leftrightarrow \forall y_0, y_1 \in \mathcal{H}, \exists u \in L^2(0,T;\mathcal{U}), \mathcal{L}_T(u|y_0) = 0$
  $\Leftrightarrow \forall y_0, y_1 \in \mathcal{H}, \exists u \in L^2(0,T;\mathcal{U}), L_T(u) = -\mathcal{L}_T(0|y_0)$.
  $\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Im}(\mathcal{L}_T(0|\bullet)) \subset \mathrm{Im}(L_T)}$

Lemme

Soient X, Y, Z trois espaces de Hilbert. Soient $F \in \mathcal{L}_c(X,Z)$ et $G \in \mathcal{L}_c(Y,Z)$. On a :

$$\mathrm{Im}\ F \subset \mathrm{Im}\ G \Leftrightarrow \exists c > 0, \forall z \in Z', \|F^* z\|_{X'} \leq c\|G^* z\|_{Y'}.$$

A l'aide de ce Lemme, on peut alors retraduire les définitions de contrôlabilité :

Proposition

Soit $T > 0$. Le système (2) est contrôlable à zéro en temps T si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que l'inégalité suivante dite inégalité d'observabilité est vérifiée :

$$\forall z \in \mathcal{H}', \int_0^T \|L_T^* z\|_{\mathcal{U}}^2 dt \geq c\|(\mathcal{L}_T(0|\cdot))^*(z)\|_{\mathcal{H}'}^2.$$

Mais qui sont L_T^* et $(\mathcal{L}_T(0|\cdot))^*$?

C'est le point de départ pour montrer le théorème suivant :

Théorème : contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur

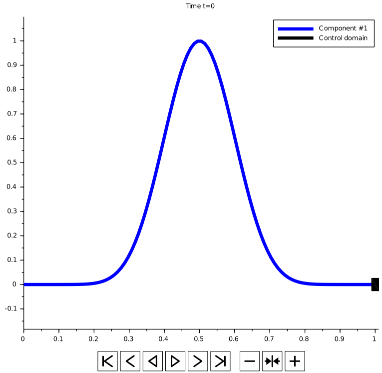
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, de classe $\mathcal{C}^2$ et connexe. Alors l'équation de la chaleur avec contrôle interne ou au bord est contrôlable à zéro pour tout temps $T > 0$.

Peut-on maintenant faire des simulations ?

Maintenant, $\Omega = (0, 1)$.

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) - \Delta y(t,x) - 1.1\pi^2 y = 0, \ (t,x) \in (0,T) \times \Omega \\ y(0,x) = y^0(x), \text{ on } \Omega, \\ y(t,0) = 0, \text{ on } (0,T), \\ y(t,1) = v_b(t), \text{ on } (0,T), \end{cases} \tag{3}$$

La solution croît exponentiellement si on la laisse faire !



Le mot de la fin

- Dans tout ce qui précéde, on a pris $\gamma = 1$.
- Que se passe-t-il si γ dépend du point d'espace ?

Le mot de la fin

- Dans tout ce qui précéde, on a pris $\gamma = 1$.
- Que se passe-t-il si γ dépend du point d'espace ?
- Grâce aux simulations on peut avoir une idée...

- Dans tout ce qui précéde, on a pris $\gamma = 1$.
- Que se passe-t-il si γ dépend du point d'espace ?
- Grâce aux simulations on peut avoir une idée...
- En fait, le résutlat précédent est encore valable !

- Dans tout ce qui précéde, on a pris $\gamma = 1$.
- Que se passe-t-il si γ dépend du point d'espace ?
- Grâce aux simulations on peut avoir une idée...
- En fait, le résutlat précédent est encore valable !

Ma question :
Comment obtenir la simulation numérique qui précède ?

- Dans tout ce qui précéde, on a pris $\gamma = 1$.
- Que se passe-t-il si γ dépend du point d'espace ?
- Grâce aux simulations on peut avoir une idée...
- En fait, le résutlat précédent est encore valable !

Ma question :
Comment obtenir la simulation numérique qui précède ?
Réponse... peut-être pour la prochaine fois :)

- Dans tout ce qui précéde, on a pris $\gamma = 1$.
- Que se passe-t-il si γ dépend du point d'espace ?
- Grâce aux simulations on peut avoir une idée...
- En fait, le résutlat précédent est encore valable !

Ma question :
Comment obtenir la simulation numérique qui précède ?
Réponse... peut-être pour la prochaine fois :)

Vos questions : ?

Merci de votre attention !